## ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$u'(t) = Au(t) \quad (E_o')$$

όπου $A$ είναι ένας σταθερός πίνακας

πεδίο ορισμού ενός τέτοιου συστήματος είναι το $\mathbb{R}$.

### ΘΕΩΡΗΜΑ:

Για το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$u'(t) = Au(t) \quad (E_o')$$

Ο πίνακας συνάρτηση $e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$

είναι ένας βασικός πίνακας λύσεων του $(E_o')$. Επιπλέον $u$ είναι μία λύση του $(E_o')$ αν και μόνο αν υπάρχει $n$-διάστατο διάνυσμα $c$ τέτοιο ώστε

$$u(t) = e^{tA} \cdot c, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ειδικά η λύση $u$ του $(E_o')$ που ικανοποιεί την συνθήκη $u(t_0) = u_0$ όπου $t_0 \in \mathbb{R}$ και $u_0$ $n$-διάστατο διάνυσμα δίνεται από τον τύπο

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot u_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Ο $e^{tA}$ είναι πίνακας λύσεων για το $(E_o')$ διότι

$(e^{tA})' = A \cdot e^{tA}$

Επιπλέον από τον τύπο Jacobi έχουμε:

$$|e^{tA}| = |e^{0A}| \exp\left[\int_0^t trA \, ds\right] = I \exp[t \, (trA)] \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Άρα $e^{tA}$ βασικός

Επιπλέον εφόσον $e^{tA}$ είναι βασικός πίνακας, $u$ είναι λύση του $(E_o')$ αν και μόνο αν υπάρχει $n$-διάστατο διάνυσμα τέτοιο ώστε

$$u(t) = \Phi(t) \cdot c = e^{tA} \cdot c.$$

• Επίσης εάν $\Phi(t) = e^{tA}$ η λύση του $(E_o')$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $u(t_0) = u_0$ δίνεται από τη σχέση

$$u(t) = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1} \cdot u_0 = e^{tA} \cdot e^{-t_0 A} \cdot u_0 = e^{(t-t_0)A} \cdot u_0$$

NO

Date

▶ Εξ' ορισμού γνωρίζουμε

$$e^{tA} = I + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^v \cdot A^v}{v!}$$

▶ Εάν ο A είναι διαγώνιος πίνακας

δηλαδή

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

τότε

$$A^v = \begin{pmatrix} a_{11}^v & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^v & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^v \end{pmatrix}$$ οπότε

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^v a_{11}^v}{v!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^v a_{22}^v}{v!} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^v a_{nn}^v}{v!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ta_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{ta_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{ta_{nn}} \end{pmatrix}$$

▶ Εάν τώρα ο A έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

υπάρχει ένας ιδιάζων πίνακας P τέτοιος ώστε:

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1}$$

όπου

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

τότε $A^2 = P \cdot B \cdot P^{-1} \cdot P \cdot B \cdot P^{-1} = P \cdot B^2 \cdot P^{-1}$

και επαγωγικά

$$A^{\omega} = P \cdot B^{\omega} \cdot P^{-1}$$

Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση

$$e^{tA} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^{\nu} A^{\nu}}{\nu!} = P \cdot P^{-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^{\nu} P \cdot B^{\nu} P^{-1}}{\nu!} =$$

$$= P\left( I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^{\nu} \cdot B^{\nu}}{\nu!} \right) P^{-1} = P \cdot e^{tB} \cdot P^{-1}$$

όπου

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{t\beta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{t\beta_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{t\beta_n} \end{pmatrix}$$

▶ Στην περίπτωση αυτή όπου ο $A$ έχει $n$ διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ τότε εάν $u$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα.
Αναζητούμε λύσεις της μορφής $x(t) = e^{\lambda t} \cdot u$
τότε εφόσον $x(t)$ θέλω να είναι λύση του (Εό) θα ικανοποιεί την εξίσωση $x'(t) = Ax(t)$
ή $\lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot u = A e^{\lambda t} \cdot u$
ή $e^{\lambda t} \cdot (\lambda u - Au) = 0$ ή $(\lambda I - A)u = 0$
Επειδή $u \neq 0$ έπεται ότι $|\lambda I - A| = 0$ δηλαδή $\lambda$ ιδιοτιμή του πίνακα $A$.

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Μια συνάρτηση $x(t) = e^{\lambda t} \cdot u$, όπου $u \neq 0$ είναι λύση της (Εό) αν και μόνο αν $\lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A$.

▶ Έστω ότι $A$ έχει $n$-ιδιοτιμές διακεκριμένες και $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
Θεωρούμε τις συναρτήσεις $u_1 = e^{\lambda_1 (t - t_0)} \cdot v_1$

$$u_2 = e^{\lambda_2 (t - t_0)} v_2$$

$$\vdots$$

$$u_n = e^{\lambda_n (t - t_0)} v_n$$

Οι $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι λύσεις του (Εό), εφόσον $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι ιδιοτιμές.
Τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές, άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητα άρα εφόσον είναι και $n$-το πλήθος είναι βάση.

NO

Date

Οπότε έστω $u_0$ n-διάστατο διάνυσμα

$\exists\, c_1, c_2, \dots, c_n$ τέτοια ώστε

$$u_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

Επειδή $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι λύσεις του $(E_0)$ έπεται ότι και

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t)$$

είναι επίσης λύση του $(E_0)$ (ως γραμμικός συνδυασμός λύσεων)

Επιπλέον

$$u(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 (t-t_0)} v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 (t-t_0)} v_2 + \dots + c_n \cdot e^{\lambda_n (t-t_0)} v_n$$

$u(t_0) = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = u_0$

Άρα η $u$ είναι η μοναδική λύση της ομογενούς που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $u(t_0) = u_0$.

Παράδειγμα:

Να λύσετε το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y'(t) = A y(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές

$$|\lambda I - A| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

Για $\lambda = \lambda_1 = 1$ έχουμε ότι $v = (v_1, v_2)$ αν

$$A v = \lambda v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1 + 2v_2 = 0 \\ v_1 + 2v_2 = 0 \end{matrix}\right\} v_1 = -2v_2$$

NO.

Date

Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\lambda_1 = 1$ είναι $u_1 = (-2, 1)$

Για $\lambda = \lambda_2 = 4$, $u$ είναι ιδιοδιάνυσμα

$$Au = 4 \cdot u \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -2v_1 + 2v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v_1 = v_2$$

Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ είναι $u_2 = (1, 1)$

Οπότε γενική λύση είναι

$$u(t) = c_1 \cdot e^{\lambda t} u_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot u_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -2c_1 \cdot e^{t} + c_2 \cdot e^{4t} \\ c_1 \cdot e^{t} + c_2 e^{4t} \end{pmatrix}$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ**: (Εάν δεν έχουμε διακεκριμένες ιδιοτιμές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το θεώρημα)

Εάν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ όχι απαραίτητα διαφορετικές και

$$P_k = \prod_{j=1}^{k} (A - \lambda_j I) \quad k = 1, \ldots, n-1$$

Έστω επίσης $r_1, r_2, \ldots, r_n$ λύσεις του ακόλουθου γραμμικού διαφορικού συστήματος

$$r_1' = \lambda_1 r_1$$

$$r_i' = r_{i-1} + \lambda_i r_i, \quad i = 2, \ldots, n$$

που πληροί την αρχική συνθήκη

$$r_1(0) = 1, \quad r_i(0) = 0, \quad i = 2, \ldots, n$$

τότε

$$e^{tA} = r_1(t) I + \sum_{k=1}^{n-1} r_{k+1}(t) \cdot P_k, \quad t \in \mathbb{R}$$

NO.

Date

**Παράδειγμα:** Να λυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y'(t) = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

$$|\lambda I - A| = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0$, $\lambda_1 = -1$ (διπλή) $\lambda_2 = 2$ (απλή)

Θεωρούμε το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$r_1'(t) = \overset{\lambda_1}{-1}\, r_1(t) \qquad r_1(0) = 1$$

$$r_2'(t) = r_1(t) + \overset{-1}{\lambda_2} r_2(t)$$

$$r_3'(t) = r_2(t) + \overset{=2}{\lambda_3} r_3(t)$$

αλλά

$$r_1'(t) + r_1(t) = 0$$

έχει λύση $r_1(t) = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$

Επίσης $r_2'(t) - \lambda_2 r_2(t) = r_1(t)$, $r_2(0) = 0$

(ή) $r_2'(t) + r_2(t) = e^{-t}$, $r_2(0) = 0$

που λύση της δίνεται ως εξής

$$r_2(t) = e^{-\int_0^t 1\, ds}\left[c + \int_0^t e^{-s} \cdot e^{\int_0^s 1\, du}\, ds\right] = \dots = (t+c)e^{-t}$$

και επειδή

$r_2(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ Άρα $r_2(t) = te^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Όμοια

$$r_3(t) - \lambda_3 r_3(t) = r_2(t) \qquad r_3(0) = 0$$

(ή) $r_3'(t) - 2r_3(t) = t \cdot e^{-t}$, $r_3(0) = 0$

άρα $r_3(t) = e^{2t}\left[-\frac{1}{3} t \cdot e^{-3t} - \frac{1}{9} e^{-3t} + \frac{1}{9}\right]$, $t \in \mathbb{R}$.

οπότε

$$e^{tA} = r_1 I + r_2 P_1 + r_3 P_2 = e^{-t} I + t \cdot e^{-t}(A+I) + r_3(t) \cdot (A+I)^2$$